

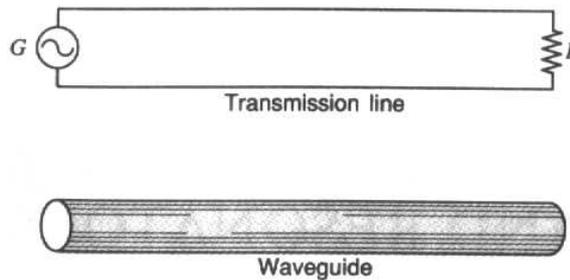
# PROPAGAÇÃO EM GUIAS DE ONDA

Guias de onda são tubos metálicos ocios ou preenchidos com material dielétrico utilizados para a transmissão de energia em altas frequências.

**Utilização:** normalmente para frequências acima de 1 GHz.

**Vantagem:** menor atenuação e maior capacidade de transmissão de potência do que as linhas de transmissão.

**Comparação:**



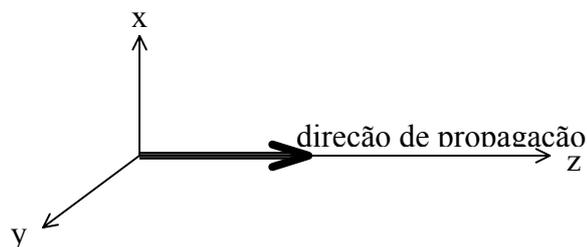
A transmissão é possível?

**Linha de transmissão:** Sim, desde DC até altas frequências.

**Guia de onda:** DC ( $f = 0$ )  $\Rightarrow$  não;  
Luz ( $10^{14} \text{ Hz} < f < 10^{15} \text{ Hz}$ )  $\Rightarrow$  sim.

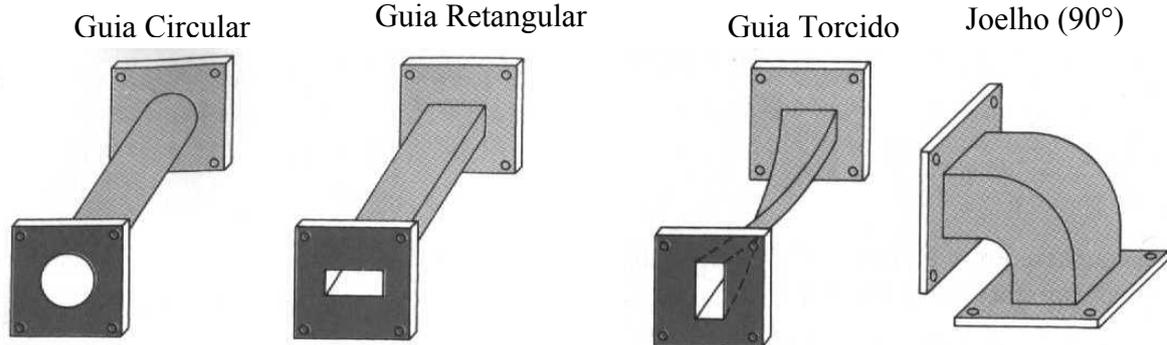
Portanto, a transmissão num guia de onda só é possível para frequências acima de uma certa frequência (frequência de corte do guia).

## TIPOS DE ONDA (MODOS DE PROPAGAÇÃO)

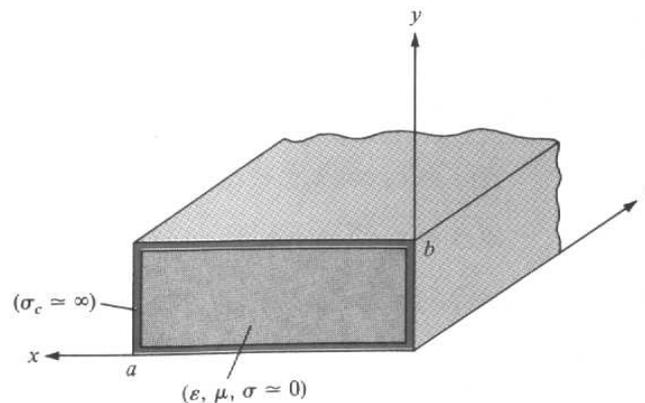


- Ondas TEM (Transverso-EletoMagnéticas):  $E_z = 0$   $H_z = 0$
- Ondas TE (Transverso-Elétricas):  $E_z = 0$   $H_z \neq 0$
- Ondas TM (Transverso-Magnéticas):  $E_z \neq 0$   $H_z = 0$

## ALGUNS TIPOS DE GUIAS DE ONDA



## O GUIA DE ONDA RETANGULAR



Será considerado que o guia é sem perdas, ou seja, tem paredes perfeitamente condutoras ( $\sigma_c = \infty$ ) e é preenchido com um dielétrico perfeito ( $\sigma_d = 0$ ). Sua seção transversal é retangular de dimensões  $a \times b$ .

A análise consiste em resolver as equações de Maxwell sujeitas às condições de contorno do problema, a saber, campo elétrico tangencial nulo nas paredes do guia, ou seja:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & \text{em } y=0 & \text{ e } y=b \\ E_y &= 0 & \text{em } x=0 & \text{ e } x=a \\ E_z &= 0 & \text{em } x=0, & x=a, y=0 \text{ e } y=b. \end{aligned}$$

Como os campos variam senoidalmente no tempo, a análise será feita no domínio da frequência (os campos serão representados por fasores).

$$\text{Vetores de campo: } \mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \qquad \mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$$

$$\text{Lei de Ampère: } \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E}$$

$$\text{Como } \sigma = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} \qquad (1)$$

$$\text{Lei de Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \qquad (2)$$

Para uma onda que se propaga na direção +z, tem-se:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z} \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y)e^{-\gamma z}. \quad (4)$$

$$\text{Assim, } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\gamma \mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z} = -\gamma \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = -\gamma \mathbf{H}(x, y)e^{-\gamma z} = -\gamma \mathbf{H}.$$

Desta forma, a derivada em relação a “z” ( $\partial/\partial z$ ) corresponde a uma multiplicação por  $-\gamma$ .

Desenvolvendo a equação vetorial (1) obtém-se:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & -\gamma \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega \varepsilon E_x \quad (5a)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon E_y \quad (5b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon E_z. \quad (5c)$$

Da mesma forma, para a equação (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & -\gamma \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x \quad (6a)$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu H_y \quad (6b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z. \quad (6c)$$

Escrevendo as componentes transversais ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$ ) em termos das componentes longitudinais ( $E_z$  e  $H_z$ ):

$$\text{De (5a) e (6b): } E_x = \frac{-1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[ \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (7a)$$

$$\text{De (5b) e (6a): } E_y = \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[ -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (7b)$$

$$\text{De (5b) e (6a): } H_x = \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (7c)$$

$$\text{De (5a) e (6b): } H_y = \frac{-1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (7d)$$

A análise das equações (7a-d) mostra que um guia de onda não permite a propagação do modo TEM. Para este modo,  $E_z = H_z = 0$ , o que substituído nestas equações anularia todos as componentes dos campos. Desta forma, diferentemente do que ocorre com linhas de transmissão, somente modos TE e/ou TM podem se propagar em guias de onda.

### Equação de Onda:

A partir de (1) e (2) e usando a identidade vetorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  obtém-se:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}.$$

Considerando apenas a componente  $E_z$  tem-se:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_z. \quad (8)$$

Analogamente pode-se obter:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon H_z. \quad (9)$$

### Modos TE num guia de onda retangular

Para os modos TE tem-se:  $E_z = 0$  e  $H_z \neq 0$ ,

onde 
$$H_z = H_z(x,y,z) = H_z(x,y)e^{-\gamma z}. \quad (10)$$

Substituindo (10) em (9) vem:

$$e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + \gamma^2 e^{-\gamma z} H_z(x, y) = -\omega^2 \mu \varepsilon e^{-\gamma z} H_z(x, y),$$

ou

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) H_z(x, y) = 0 \quad (11)$$

A resolução de (11) permite obter a distribuição espacial de  $H_z$  na seção do guia (plano  $xy$ ). Pode-se mostrar que a solução é dada por:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right), \quad (12)$$

com

$$\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 = \text{constante} \hat{=} k_c^2, \quad (13)$$

onde “m” e “n” são números naturais (0, 1, 2, ...) e  $H_0$  é uma constante.

### Componentes de Campo (modo TE):

De (10) e (12):

$$H_z = H_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}. \quad (14)$$

Substituindo (14) em (7a-d), com  $E_z = 0$ , obtém-se:

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (15a)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) H_0 \text{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (15b)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) H_0 \text{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (15c)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n \pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (15d)$$

Cada par  $(m, n)$  define os diversos *modos de propagação*, os quais possuem diferentes configurações espaciais dos campos.

**Notação:** Modos  $TE_{mn}$  (com  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ )

A partir de (14) e (15) observa-se que o inteiro “ $m$ ” é igual ao número de semiciclos de variação dos campos na direção  $x$  e o inteiro “ $n$ ” é igual ao número de semiciclos de variação dos campos na direção  $y$ .

Observa-se também que “ $m$ ” e “ $n$ ” não podem ser simultaneamente nulos, uma vez que tal condição anularia todos os campos dados por (15). Desta forma, o modo  $TE_{00}$  é impossível. Alguns modos possíveis são:  $TE_{01}$ ,  $TE_{10}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{21}$ , etc.

**Exemplo:** Escrever as expressões para as componentes de campo dos modos  $TE_{m0}$  em um guia retangular.

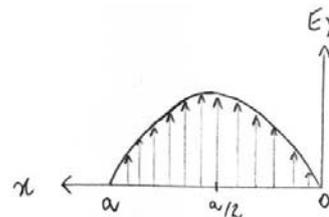
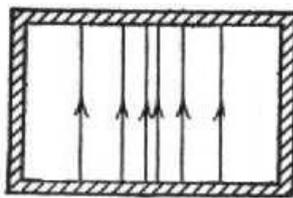
De (14) e (15), com  $n = 0$ :

$$\begin{array}{ll}
 E_x = 0 & H_x = H_{x0} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z} \\
 E_y = -E_{y0} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z} & H_y = 0 \\
 E_z = 0 & H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z}
 \end{array}, \quad (16)$$

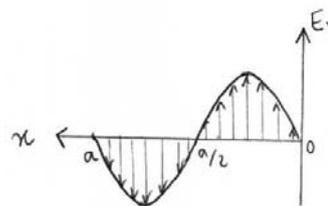
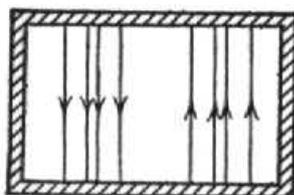
onde  $E_{y0}$  e  $H_{x0}$  são constantes.

**Configuração dos campos na seção transversal do guia (exemplos):**

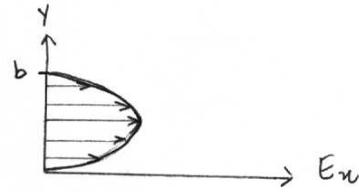
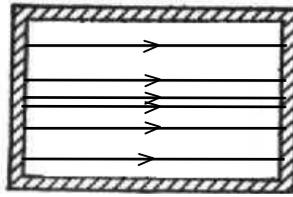
**Modo  $TE_{10}$ :** ( $m = 1$      $n = 0$ )



**Modo  $TE_{20}$ :** ( $m = 2$      $n = 0$ )

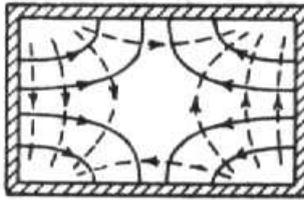


Analogamente, Modo  $TE_{01}$ : ( $m = 0$      $n = 1$ )

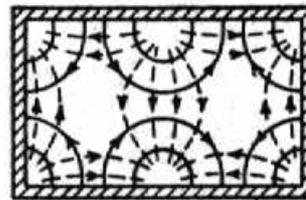


Outros exemplos:

**Modo  $TE_{11}$**



**Modo  $TE_{21}$**



### Modos TM num guia de onda retangular

Para os modos TM tem-se:  $E_z \neq 0$     e     $H_z = 0$ ,

onde 
$$E_z = E_z(x,y,z) = E_z(x,y)e^{-\gamma z} \quad (17)$$

Resolvendo (8) e utilizando (7a-d) obtém-se:

**Componentes de Campo (modo TM):**

$$E_z = E_z(x, y, z) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (18a)$$

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (18b)$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n \pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (18c)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n \pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (18d)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}, \quad (18e)$$

onde  $E_0$  é uma constante e  $\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 = \text{constante} \hat{=} k_c^2$ .

**Notação:** Modos  $TM_{mn}$  (com  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ )

A partir de (18a-e) observa-se que nem “m” nem “n” podem ser nulos, uma vez que tal condição anularia todos os campos. Assim, os modos  $TM_{m0}$  e  $TM_{0n}$  não são possíveis. Conseqüentemente,  $TM_{11}$  é o modo transverso-magnético de mais baixa ordem que pode se propagar num guia retangular.

**Exemplos:**



### Frequências de Corte

Para qualquer modo (TE ou TM), o vetor campo elétrico no guia é dado por:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z}. \quad (\text{fasor})$$

O campo correspondente no domínio do tempo é:

$$\mathbf{E}(t) = \Re\{\mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z} e^{j\omega t}\}, \quad (19)$$

onde a constante de propagação é obtida a partir de (13):

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}. \quad (20)$$

### Caso 1: Propagação (altas frequências)

$$\text{Se } \omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 \quad \gamma = j\beta \quad \alpha = 0.$$

$$\text{Assim: } \mathbf{E}(t) = \Re\{\mathbf{E}(x, y)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} \Rightarrow \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(x, y)\cos(\omega t - \beta z)$$

Neste caso tem-se uma onda propagando-se sem atenuação ao longo do guia (sem perdas). A velocidade de fase ( $v_f = \omega/\beta$ ) e o comprimento de onda ( $\lambda = 2\pi/\beta$ ) dependerão das propriedades físicas do guia, da frequência e do modo considerado, conforme (20).

### Caso 2: Onda evanescente (baixas frequências)

$$\text{Se } \omega^2 \mu \epsilon < \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 \quad \gamma = \alpha \quad \beta = 0.$$

$$\text{Assim: } \mathbf{E}(t) = \Re\{\mathbf{E}(x, y)e^{-\alpha z} e^{j\omega t}\} \Rightarrow \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(x, y)e^{-\alpha z} \cos \omega t$$

Neste caso não há propagação. Para estes modos, chamados *evanescentes*, o campo se atenua muito rapidamente com a distância. A velocidade de fase e o comprimento de onda são indefinidos. A forte atenuação não é devida a perdas mas sim à impossibilidade dos campos de obedecer às condições de contorno na frequência de operação. A energia associada às ondas evanescentes é puramente reativa.

### Caso 3: Corte

$$\text{Se } \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 \quad \gamma = 0 \quad \alpha = \beta = 0.$$

Este caso corresponde ao limite de transição entre os dois casos anteriores. A frequência na qual isto ocorre é chamada *frequência de corte* ( $f_c$ ) e é dada por:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (21)$$

**Exercícios:** 1 - Calcular a frequência de corte dos doze primeiros modos de um guia retangular oco com dimensões  $a = 2,286$  cm e  $b = 1,016$  cm. Qual (is) modo(s) se propaga(m) em  $f = 10$  GHz?

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{2,286 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{n}{1,016 \times 10^{-2}}\right)^2}$$

modo	m	n	$f_c$ (GHz)
TE	1	0	6,56
TE	2	0	13,12
TE	0	1	14,76
TE, TM	1	1	16,15
TE	3	0	19,68
TE, TM	2	1	19,74
TE	4	0	24,61
TE, TM	3	1	26,24
TE	0	2	29,52

Em 10 GHz, somente o modo  $TE_{10}$  se propaga. Este modo, que tem a mais baixa frequência de corte, é chamado *modo dominante* do guia. Na maior parte das aplicações práticas, as dimensões do guia são projetadas de modo que somente o modo dominante se propague na frequência de operação.

2 - Recalcular a frequência de corte do modo dominante (TE<sub>10</sub>) se o guia anterior for preenchido com um dielétrico não magnético com ε<sub>r</sub> = 16.

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 16\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{2,286 \times 10^{-2}}\right)^2} \Rightarrow (f_c)_{TE_{10}} = 1,64 \text{ GHz}$$

### Comprimento de onda de corte (λ<sub>c</sub>)

O comprimento de onda de corte corresponde ao comprimento de onda num meio ilimitado (caracterizado por μ e ε) na frequência de corte, ou seja:

$$\lambda_c = \frac{v_0}{f_c} \quad \text{onde} \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \text{velocidade num meio ilimitado.}$$

Desta forma, usando (21):

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (22)$$

**Exemplos:** • Modo TE<sub>10</sub> ⇒ λ<sub>c</sub> = 2a e f<sub>c</sub> =  $\frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v_0}{2a}$

• Modo TE<sub>01</sub> ⇒ λ<sub>c</sub> = 2b e f<sub>c</sub> =  $\frac{1}{2b} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v_0}{2b}$ .

### Velocidade de fase (v<sub>f</sub>)

A velocidade de fase corresponde à velocidade da frente de onda (superfície de fase constante) dentro do guia:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta},$$

onde a constante de propagação no guia é obtida a partir de (20):

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu\epsilon} = j\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Usando (21) pode-se escrever:

$$\beta = 2\pi\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2}.$$

Assim: 
$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2\pi f}{2\pi\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

$$v_f = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}. \quad (23)$$

De (23) verifica-se que a velocidade de fase no guia é sempre maior que a velocidade no meio ilimitado. Além disso, diferentemente do que ocorre com uma onda plana uniforme (TEM) num meio sem perdas, a velocidade de fase no guia varia com a frequência.

### Análise do modo dominante (TE<sub>10</sub>)

Supondo  $a > b$ , o modo dominante do guia retangular é o TE<sub>10</sub>. Este modo é o de maior interesse na prática já que possui a menor atenuação entre todos os modos no guia retangular e por ter um campo elétrico linearmente polarizado, o que pode ser necessário em algumas aplicações.

#### Componentes de Campo (modo TE<sub>10</sub>):

A partir de (16), com  $m = 1$  e  $\gamma = j\beta$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & H_x &= H_{x0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) j e^{-j\beta z} \\ E_y &= -E_{y0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) j e^{-j\beta z} & H_y &= 0 \\ E_z &= 0 & H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \end{aligned}, \quad (24)$$

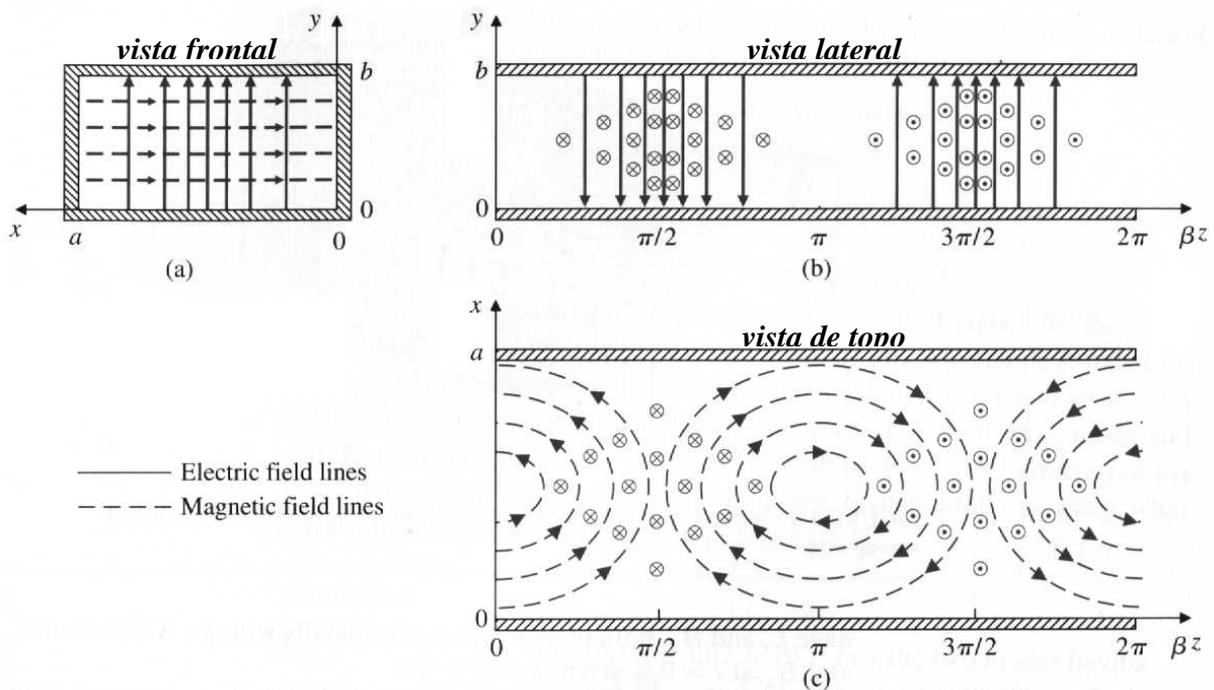
onde 
$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

**Exercício:** Escrever as expressões para os campos do modo TE<sub>10</sub> no domínio do tempo.

Usando  $\mathbf{f}(t) = \Re\{\mathbf{F}(x, y)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$  e lembrando que  $j = e^{j\pi/2}$  e  $\cos(\phi + \pi/2) = -\operatorname{sen}(\phi)$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 E_x(t) &= 0 & H_x(t) &= -H_{x0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \\
 E_y(t) &= E_{y0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) & H_y(t) &= 0 \\
 E_z(t) &= 0 & H_z(t) &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z)
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

### Linhas de Campo (modo TE<sub>10</sub>):

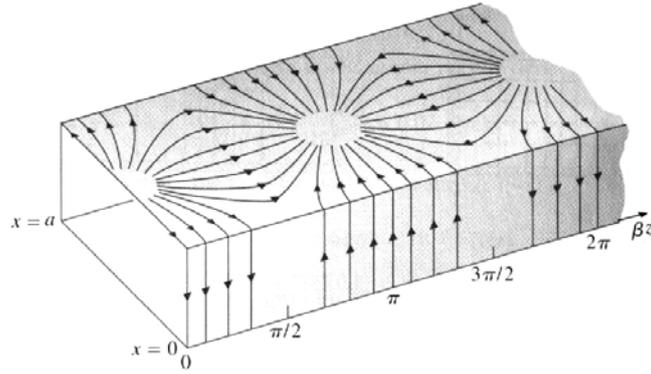


### Frequência de corte e comprimento de onda de corte (modo TE<sub>10</sub>):

$$f_c = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v_0}{2a} \qquad \lambda_c = 2a$$

### Linhas de corrente (modo TE<sub>10</sub>):

A descontinuidade das componentes tangenciais do campo magnético nas paredes do guia, está associada ao surgimento de correntes superficiais (em A/m) dadas por  $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário nas paredes internas do guia. Estas correntes estão representadas na figura abaixo.



É possível introduzir fendas nas paredes do guia (para medição, p. ex.) sem perturbar seu funcionamento. Basta que as fendas sejam paralelas às linhas de corrente. Caso as fendas cortem as linhas de corrente, parte da energia que se propaga no guia será radiada para o exterior (o que é utilizado em certos tipos de antenas).

### Propagação no guia: representação alternativa

A onda que se propaga no guia (nos modos TE ou TM) pode ser vista como a superposição de ondas planas (TEM) que se propagam por múltiplas reflexões no interior do guia.

Por exemplo, para o modo TE<sub>10</sub> o campo elétrico é dado por:

$$E_y = -E_{y0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) j e^{-j\beta z}.$$

Lembrando que  $\operatorname{sen} \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) / 2j$  pode-se escrever:

$$E_y = -E_{y0} \left[ \frac{e^{j\pi x/a} - e^{-j\pi x/a}}{2} \right] e^{-j\beta z}$$

ou,

$$E_y = \frac{E_{y0}}{2} \left[ e^{-j\beta(z+\pi x/\beta a)} - e^{-j\beta(z-\pi x/\beta a)} \right]. \quad (26)$$

O primeiro termo em (26) representa uma onda TEM se propagando numa direção que faz um ângulo  $\theta$  em relação à direção positiva de “z” dado por:

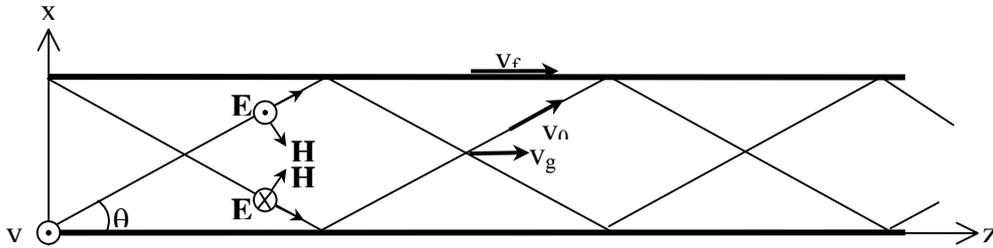
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\beta a}\right). \quad (27)$$

O segundo termo de (26) representa uma onda TEM se propagando numa direção que faz um ângulo  $-\theta$  em relação à direção positiva de “z”. Usando (27) e sabendo que para o modo

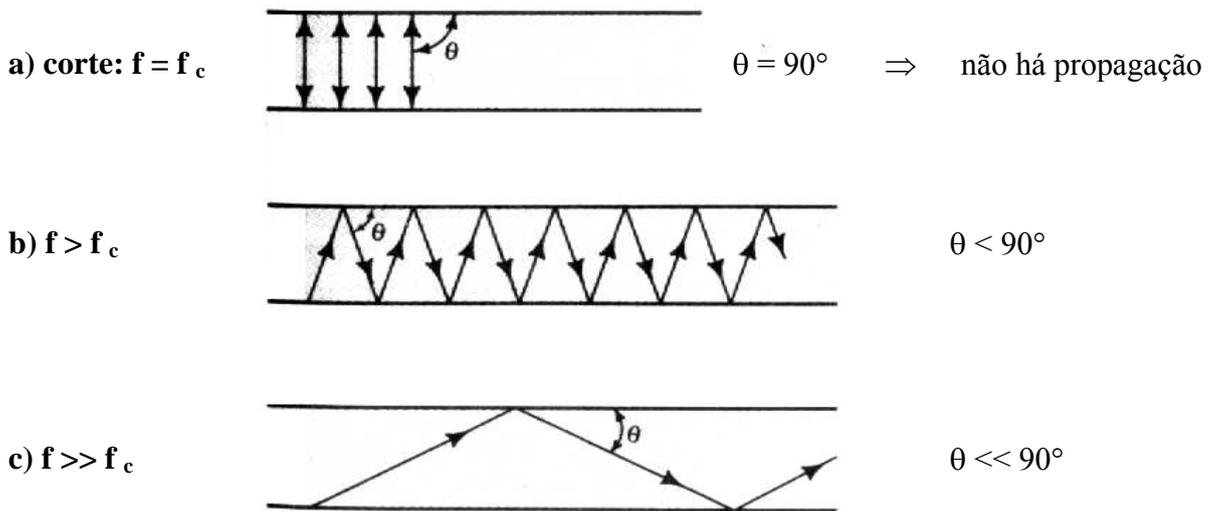
TE<sub>10</sub>:  $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$  e  $f_c = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ , pode-se mostrar que  $\theta$  também pode ser dado por:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{f_c}{f}\right). \quad (28)$$

A figura abaixo mostra uma vista lateral do guia (plano  $xz$ ) com as duas ondas TEM que se superpõem para formar a onda  $TE_{10}$ .



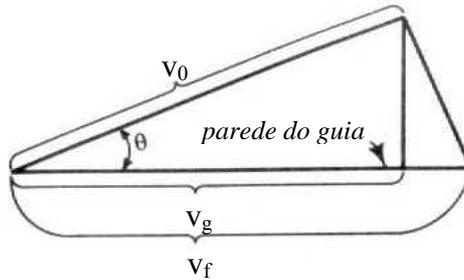
As figuras abaixo ilustram a variação do ângulo  $\theta$  em função da frequência.



Observa-se que  $\theta = 90^\circ$  quando a frequência de operação é igual à  $f_c$ . Deste modo as ondas TEM refletem-se perpendicularmente às paredes e não há propagação na direção “z”. Tem-se portanto uma onda estacionária entre as paredes e nenhuma energia é propagada. Para frequências acima do corte, a energia pode se propagar ao longo do guia. Para frequências muito acima do corte, a propagação se aproxima das condições de propagação num meio ilimitado.

### Triângulo de velocidades:

Como conseqüência das múltiplas reflexões ao longo do guia, têm-se três tipos de velocidade, ilustradas no triângulo abaixo.



•  $v_0 =$  velocidade da onda TEM num meio ilimitado  $\Rightarrow v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

•  $v_f =$  velocidade de fase: corresponde à velocidade de propagação das frentes de onda (superfícies de fase constante);

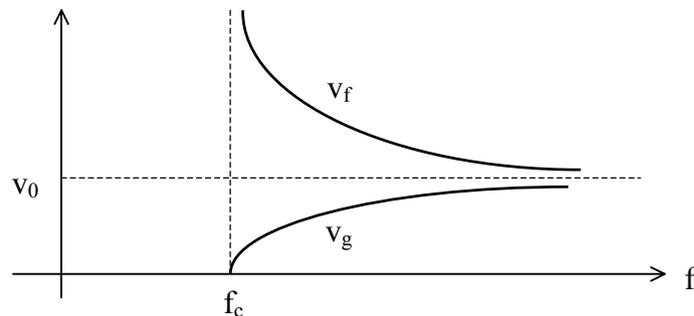
•  $v_g =$  velocidade de grupo: corresponde à velocidade de propagação da energia ao longo do guia.

Do triângulo de velocidades e usando (28) pode-se obter:

$$v_f = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$v_g = v_0 \cos \theta = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_0 = \sqrt{v_f v_g}$$



Observa-se  $v_f$  é sempre maior que  $v_0$ . Se o guia for preenchido com ar, a velocidade de fase será maior que  $c$  (velocidade da luz no vácuo). Isto não viola a teoria da relatividade de Einstein uma vez que a energia não se propaga com velocidade  $v_f$ . A velocidade de propagação da energia (informação) é igual à  $v_g$ , que é sempre menor que  $c$ .

**Exercício:** Um guia retangular preenchido com ar tem dimensões  $a = 8,636$  cm e  $b = 4,318$  cm. Para o modo  $TE_{10}$  calcular:

**a)** a frequência de corte ( $f_c$ ) e o comprimento de onda de corte ( $\lambda_c$ );

**b)** as velocidades de fase ( $v_f$ ) e de grupo ( $v_g$ ) na frequência de operação de 3 GHz.

**SOLUÇÃO:** **a)**  $f_c = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v_0}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 8,636 \times 10^{-2}} \Rightarrow f_c = 1,737$  GHz

$$\lambda_c = \frac{v_0}{f_c} = \frac{3 \times 10^8}{1,737 \times 10^9} \quad \text{ou} \quad \lambda_c = 2a = 2 \times 8,636 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \lambda_c = 17,272 \text{ cm}$$

$$\text{b) } v_f = \frac{v_0}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (1,737/3)^2}} \quad \Rightarrow \quad v_f = 3,68 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_g = v_0 \sqrt{1 - (f_c/f)^2} = 3 \times 10^8 \times \sqrt{1 - (1,737/3)^2} \quad \Rightarrow \quad v_g = 2,44 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Obs.:} \quad \theta = \arcsen(f_c/f) = \arcsen(1,737/3) \quad \Rightarrow \quad \theta = 35,4^\circ$$

-----

## Atenuação num guia retangular

### I - Para frequências acima do corte ( $f > f_c$ ):

Se o dielétrico tiver perdas ( $\sigma_d \neq 0$ ) e se as paredes do guia não forem perfeitamente condutoras ( $\sigma_c \neq \infty$ ), haverá perda de potência à medida que a onda se propaga no guia, conforme a equação abaixo:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad \text{com} \quad \alpha = \alpha_c + \alpha_d, \quad (29)$$

onde:  $\alpha_c$  = constante de atenuação devido às perdas no condutor;  
 $\alpha_d$  = constante de atenuação devido às perdas no dielétrico.

A determinação de  $\alpha_c$  e  $\alpha_d$  não será apresentada aqui. Pode-se mostrar que as constantes de atenuação são dadas por:

$$\text{Para qualquer modo:} \quad \alpha_d = \frac{\sigma_d \eta_d}{2\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (30)$$

$$\text{Para o modo TE}_{10}: \quad \alpha_c = \frac{2}{b\sigma_c \delta \eta_d \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{b}{a} \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 \right], \quad (31)$$

onde  $\eta_d = \sqrt{\mu/\epsilon}$   $\Rightarrow$  impedância intrínseca do dielétrico (desprezando as perdas);

e  $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}$   $\Rightarrow$  profundidade pelicular nas paredes do guia.

**Exercício:** Seja um guia retangular de cobre ( $\sigma_c = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ) preenchido com poliestireno ( $\sigma_d = 10^{-17} \text{ S/m}$  e  $\epsilon_r = 2,55$ ) de dimensões  $a = 4,2 \text{ cm}$  e  $b = 2,6 \text{ cm}$ . Calcular a atenuação do modo dominante na frequência de operação  $f = 4,8 \text{ GHz}$ .

$$\eta_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{2,55 \times 8,85 \times 10^{-12}}} = 235,97 \Omega$$

$$\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma_c} = 1/\sqrt{\pi \times 4,8 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5,8 \times 10^7} = 9,54 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$f_c = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{2 \times 0,042 \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 2,55 \times 8,85 \times 10^{-12}}} = 2,235 \text{ GHz}$$

Substituindo estes valores em (30) e (31) obtém-se:

$$\alpha_d = 1,33 \times 10^{-15} \text{ Np/m} \quad \text{e} \quad \alpha_c = 4,22 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$$

Portanto:  $\alpha = \alpha_d + \alpha_c \cong \alpha_c = 4,22 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$

Como  $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB} \Rightarrow$  **Atenuação =  $0,0367 \text{ dB/m} = 36,7 \text{ dB/km}$**

## II - Para frequências abaixo do corte ( $f < f_c$ ):

Neste caso, a constante de atenuação para qualquer modo pode ser obtida a partir de:

$$\alpha = \gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (32)$$

**Exercício:** Para o guia do exercício anterior, calcular a atenuação do modo dominante ( $\text{TE}_{10}$ ) na frequência de operação  $f = 1,0 \text{ GHz}$ .

Como  $f = 1,0 \text{ GHz} < f_c = 2,235 \text{ GHz}$  tem-se (com  $m = 1$  e  $n = 0$ )

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{0,042}\right)^2 - (2\pi \times 10^9)^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2,55 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 66,9 \text{ Np/m}$$

**Atenuação =  $581,1 \text{ dB/m}$**

Como já dito anteriormente, esta forte atenuação não é devida a perdas no guia mas sim à impossibilidade dos campos de obedecer às condições de contorno na frequência de operação.

-----

## Excitação de guias de onda

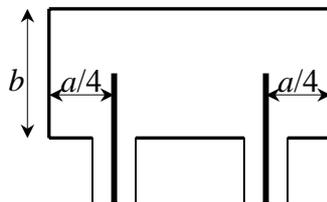
Um guia de onda é geralmente excitado ou alimentado por um cabo coaxial ou outro guia de onda. Entre os métodos mais comuns de acoplamento tem-se:

**a) acoplamento por sonda elétrica (ponta de prova):** deve ser posicionada paralelamente ao campo elétrico onde este é máximo (para o modo de interesse). A figura abaixo mostra a excitação do modo  $TE_{10}$  de um guia retangular a partir de um cabo coaxial.



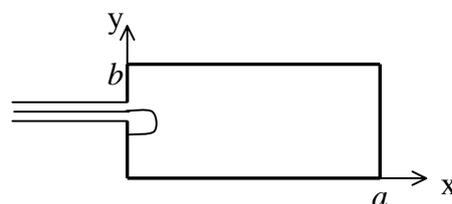
O comprimento da sonda ( $d$ ) deve ser escolhido de forma a obter casamento de impedância entre o cabo coaxial e o guia de onda. Além disso, a sonda deve estar a uma distância de  $\lambda/4$  da terminação curto-circuitada do guia de modo que as ondas que se refletem na terminação estejam em fase com as ondas que são radiadas diretamente pela sonda dentro do guia.

A figura abaixo mostra como fazer o acoplamento de maneira a excitar o modo  $TE_{20}$ . Neste caso as correntes nas sondas devem estar defasadas de  $180^\circ$ .



**b) acoplamento por anel de corrente (loop):** deve ser posicionado perpendicularmente ao campo magnético onde este é máximo. O objetivo é maximizar o fluxo magnético através do anel.

A figura abaixo mostra um exemplo de como acoplar um cabo coaxial com um guia retangular usando um anel de corrente de maneira a excitar o modo  $TE_{10}$ .



**c) acoplamento através de aberturas:** Este tipo de acoplamento é usado principalmente para acoplar dois guias de onda ou um guia com uma cavidade ressonante.

